

Vorkurs Mathematik

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Endliche geometrische Reihe). Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Aufgabe 2.

- (i) Es sei p eine *ungerade* natürliche Zahl. Man summiere für $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq -1$ die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{p-1} (-q)^k$.
- (ii) Zeige: Enthält die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ einen ungeraden Primfaktor p , so ist

$$q := 2^n + 1$$

mit Sicherheit keine Primzahl.

Tip: Man mache den Ansatz $n = mp$ und benutze dann (i), um zu zeigen, daß q einen echten Teiler besitzt.

Bemerkung. Primzahlen der angegebenen Form sind also notwendig von der Form $F_n := 2^{(2^n)} + 1$. Die Zahlen F_n heißen *Fermat-Zahlen*. Nicht alle von ihnen sind wirklich Primzahlen: Die kleinste Fermat-Zahl, die keine Primzahl ist, ist $F_5 = 4294967297$, also $F_5 = 641 \cdot 6700417$.

- (iii) $M_n := 2^n - 1$ ist höchstens dann eine Primzahl, wenn $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.

Tip: Ist $n = a \cdot b$ zusammengesetzt, so zerlege man M_n mit Hilfe der Formel über die endliche geometrische Reihe.

Bemerkung. Ist n eine Primzahl, so ist dennoch M_n nicht notwendigerweise eine Primzahl. Z.B. ist $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ eine Primzahl, $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ jedoch nicht. Diejenigen M_n , die Primzahlen sind, heißen *Mersenne-Primzahlen*.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Menge D aller natürlichen Zahlen, die „bei Division durch 3 den Rest 1 haben“:

$$D := \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} .$$

- (i) D ist unter der Multiplikation natürlicher Zahlen *abgeschlossen*; das soll heißen: Multipliziert man zwei Elemente von D miteinander, so liegt das Ergebnis wieder in D .
- (ii) Analog zu \mathbb{N} nennen wir eine Zahl $c \in D$ *unzerlegbar in D* , wenn $c > 1$ ist und wenn aus $c = ab$ mit $a, b \in D$ folgt: $a = 1$ oder $b = 1$. Man zeige: Die Zahlen $4, 7, 10, 13 \in D$ sind unzerlegbar; die Zahlen $16, 28 \in D$ sind hingegen zerlegbar.

Bemerkung. Beachte, daß die Bezeichnung „Primzahl in D “ (statt „unzerlegbar in D “) hier mit Bedacht und aus gutem Grunde vermieden wurde (wie sich später herausstellen wird).

- (iii) Jede Zahl $a \in D$ mit $a > 1$ läßt sich als endliches Produkt $a = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$ von in D unzerlegbaren Zahlen $c_1, \dots, c_n \in D$ schreiben.

Tip: Schwierigkeiten? Es könnte nützlich sein, sich den entsprechenden Beweis für \mathbb{N} nochmals zu Gemüte zu führen.

Aufgabe 4. Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p > 1$. Beweise, daß p genau dann eine Primzahl ist, wenn die sog. *Primeigenschaft* gilt: Sind $a, b \geq 1$ natürliche Zahlen und ist p ein Teiler des Produktes $a \cdot b$, so folgt, daß p ein Teiler von a oder ein Teiler von b ist.

Tip: Fundamentalsatz der Arithmetik.